



රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07
Royal College - Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (ප්‍රසන්න පෙළ) විභාගය
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination
13 වන ශ්‍රේණිය- දෙවන වාර පරීක්ෂණය - 2019 මාර්තු
Grade 13 Second Term Test - March 2019

සංයුක්ත ගණිතය - I

B - කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

(11) a) $f(x) = |ax + b|^2 + |ax + b| + c$ වේ. මෙහි $a \neq 0$ හා $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ.

i) $f(x) = 0$ මගින් ප්‍රතින්න වර්ගය සමීකරණ දෙකක් ලැබෙන බව පෙන්වා දීවා සොයන්න.

ii) $f(x) = 0$ ට තාත්වික මූල පැවතීම සඳහා, c ට ගත හැකි අගය පරාසය සොයන්න.

iii) $c = 1$ විට, $f(x) = 0$ වර්ගය සමීකරණවල මූල α, β හා γ, δ නම්

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{-4b}{a} \text{ සහ}$$

$$\alpha \beta \gamma \delta = \frac{b^4 + b^2 + 1}{a^4} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

b) $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 4$ වේ. මෙහි $a, b \in \mathbb{Q}$. $(x - \sqrt{2})$, $f(x)$ හි සාධකයක් නම්, a හා b සොයන්න.
 $f(x) \geq 0$ වන පරිදි x ට ගත හැකි අගය කුලකය සොයන්න.

(12) a) $\frac{3^2 - 2.1}{1.3} \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{5^2 - 2.2}{3.5} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7^2 - 2.3}{5.7} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය වන U_r සොයන්න.

$$U_r = \left(\frac{1}{3}\right)^r + f(r) - f(r+1) \text{ වන පරිදි } f(r) \text{ සොයන්න.}$$

$$\text{එනමින්, } \sum_{r=1}^n U_r = 1 - \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n U_r \text{ අභිසාරී බව පෙන්වා, එම අගය සොයන්න.}$$

b) i) ඉපුරුදු අංකනයෙන් ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ බව සාධනය කරන්න.

ii) $(1+x)^n$ සඳහා වූ ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

iii) ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන්

$$C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \dots + C_n C_0 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\frac{{}^{n+1}C_0 {}^{n+1}C_1 {}^{n+1}C_2 \dots {}^{n+1}C_{n+1}}{{}^nC_0 {}^nC_1 {}^nC_2 \dots {}^nC_n} = \frac{(n+1)^n}{n!} \text{ බව සාධනය කරන්න.}$$

(13) a) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ න්‍යාසයේ අවයව $a_{ij} = 3i - 2j$ මගින් දෙනු ලබයි නම්, A සොයන්න.

$A^2 + \lambda A + \mu I = 0$ වන පරිදි λ සහ μ හි අගය සොයන්න.

එනමින් A^{-1} සොයන්න.

b) i) ආගන්ති සටහනක P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය මගින් Z_1 සහ Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි නම්, $Z_1 + Z_2$ මගින් නිරූපණය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ලබා ගැනීම සඳහා වන ජ්‍යාමිතික නිරූපණය විස්තර කරන්න.

ii) Z_1 සහ Z_2 ශුන්‍ය නොවන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙක A සහ B මගින් නිරූපණය වේ. $\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} = 1$

නම්, OAB මගින් සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නිරූපණය වන බව පෙන්වන්න. (O මූලය වේ)

iii) $Z_1 = 3 + i$ සහ $Z_2 = -1 + 4i$ වේ. —————

$|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$ වන පරිදි වූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන පථය ජ්‍යාමිතිකව විස්තර කර, පථයේ සමීකරණය ලබා ගන්න.

iv) n ධන නිඛිලයක් සඳහා වන ද මුඛාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$Z = \cos \theta + i \sin \theta$ නම් $\frac{1}{Z}$ ලබා ගන්න.

Z^n සහ $\frac{1}{Z^n}$ සලකා, n සඳහා සුදුසු අගයන් ආදේශ කිරීමෙන් $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ බව පෙන්වන්න.

(14) a) $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ නම්

$\frac{dy}{dx} + \frac{x^{2n}}{2n!} = y$ බව පෙන්වන්න.

එනමින් $x \frac{d^2 y}{dx^2} - (2n + x) \frac{dy}{dx} + 2ny = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) $xy = c^2$ චක්‍රයට $P \equiv (ct, \frac{c}{t})$ ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳිනු ලබන ස්පර්ශකයේ සහ අභිලම්භයේ සමීකරණ ලබා ගන්න.

අභිලම්භය නැවත චක්‍රය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. (t පරාමිතියක් වේ.)

c) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ වේ. a, b, c හා d යනු නියත වේ. $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \lambda[(x + \mu)^2 + \gamma]$ යන ආකාරයට සකසන්න. මෙහි λ, μ හා γ යනු a, b, c, d ඇසුරින් නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

i) $|x| > 1$ සඳහා $f'(x) > 0$

ii) $|x| < 1$ සඳහා $f'(x) < 0$

iii) $f(1) = -1$ හා $f(-1) = 2$

ලෙස දී ඇත්නම් a, b, c හා d අගයන් සොයන්න.

$y = f(x)$ හි ශ්‍රිතය ප්‍රස්තාරගත කරන්න.

දෙවන අවකලන සංගුණකය භාවිතයෙන් ශ්‍රිතයේ අවකලනාත්මක වීම සත්‍ය කරන්න.

(15) a) i) $\int (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1) dx$ සොයන්න.

ii) නිත්‍ය භාග ඇසුරෙන් $\int \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 - x^2 + 1} \right) dx$ සොයන්න.

b) $I_n = \int x^n (1 + x^3)^7 dx$, $n \in \mathbb{Z}^+$ යයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්

$I_n = \frac{1}{(n+22)} [x^{n+2} (1 + x^3)^8 - (n+2) I_{n+3}]$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $\int x^5 (1 + x^3)^7 dx = \frac{1}{216} (8x^3 - 1) (1 + x^3)^8 + C$ බව අපෝහනය කරන්න. මෙහි C යනු අනිමිත නියතයකි.

c) i) $f(x)$ යනු $[0, a]$ ප්‍රාන්තරය තුළ අනුකලනය කළ හැකි ශ්‍රිතයක් නම්,

$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි a යනු නියතයකි.

ii) නවය $\int f(2a-x) dx = f(x)$ නම් $\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ බව සාධනය කරන්න.

iii) $\int_0^{\pi/2} \ln |\sin x| dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ බව පෙන්වන්න.

d) $\int_{-1}^2 |x(x-1)(x+1)| dx$ හි අගය සොයන්න.

(16) a) P_1, P_2 සහ P_3 යනු පිළිවෙලින් $(m^2, 2m)$, $(mm', m + m')$ සහ $(m'^2, 2m')$ යන ලක්ෂ්‍යවල සිට

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$, $\left(P = -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)$ සරල රේඛාවට ඇඳී ලම්බකවල දිග නම් P_1, P_2 සහ P_3

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක අනුයාත පද තුනක් බව පෙන්වන්න.

b) P හි දී ඡේදනය වන, $5x + 12y - 10 = 0$ සහ $5x - 12y - 40 = 0$ යන සරල රේඛා දෙක විෂ්කම්භය ඒකක 6 වන C_1 වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. C_1 හි කේන්ද්‍රය වන C , පළමු වෘත්ත පාදය තුළ පිහිටයි. C_1 වෘත්තය හා ඒක කේන්ද්‍රීය වන සහ $CP : PD = 2 : 3$ වන පරිදි 1) ලක්ෂ්‍යය පරිධිය මත පිහිටන, C_2 වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

(17) a) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 0$ වේ. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ යන්නට එකිනෙකට ප්‍රතිත්ත අගයන් 4 ක් ගත හැකි බව පෙන්වා, එහි උපරිම අගය 3 බව පෙන්වන්න.

b) $\sin$ ප්‍රමේයය ඇසුරින් $\cos$ ප්‍රමේයය අපෝහනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ A සිට ඇඳි h උසැති උච්චය D හි දී BC හමුවේ.

$b : c = r : 1$ ($r < 1$) නම්,

$$h = \frac{ar \sin A}{r^2 - 2r \cos A + 1} \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

$$\text{එනමින් } (1+r)^2 t^2 - \left(\frac{2ar}{h}\right)t + (1-r^2) = 0 \quad \text{බව පෙන්වන්න. } (t = \tan A/2)$$

$$\text{තවද } h \leq \frac{ar}{1-r^2} \quad \text{බව අපෝහනය කරන්න.}$$

c) $x \in [-1, 1]$ යදහා, $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ බව සාධනය කරන්න.

එනමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\sin^{-1} x \leq \cos^{-1} x$ තෘප්ත කරන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

